

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой

Кафедра алгебры и
математической логики
(АиМЛ_ФМиИ)

наименование кафедры

подпись, инициалы, фамилия

«___» _____ 20__ г.

институт, реализующий ОП ВО

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

Кафедра алгебры и
математической логики
(АиМЛ_ФМиИ)

наименование кафедры

Левчук В.М.

подпись, инициалы, фамилия

«___» _____ 20__ г.

институт, реализующий дисциплину

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Дисциплина Б1.В.03 Алгебраическая геометрия и алгебраические
группы

Направление подготовки / 01.04.01 Математика Магистерская
специальность программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и
дискретная математика

Направленность
(профиль)

Форма обучения

очная

Год набора

2020

Красноярск 2021

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования с учетом профессиональных стандартов по укрупненной группе

010000 «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

Направление подготовки /специальность (профиль/специализация)

Направление 01.04.01 Математика Магистерская программа 01.04.01.02

Алгебра, логика и дискретная математика

Программу составили	<u>Доктор физико-математических наук, Профессор, Нужин Яков Нифантьевич;;;</u>
------------------------	--

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель преподавания дисциплины

Целью дисциплины «Алгебраическая геометрия и алгебраические группы» является изучение основ интенсивно развивающейся теории алгебраических групп и алгебраической геометрии, а также приложения этих теорий.

1.2 Задачи изучения дисциплины

Предметом являются нетеровы кольца, кольцо многочленов $K[X]$ от n переменных над алгебраически замкнутым полем K . Аффинное пространство K^n , его аффинные многообразия и два основных соответствия аффинных многообразий в K^n и идеалов в $K[X]$. Топология Зарисского на аффинном пространстве и на аффинном многообразии V . Теоремы Гильберта о базисе и о корнях (нулях). Биjectивность соответствия между аффинными многообразиями в K^n и радикальными идеалами в $K[X]$. Проективное пространство $P^n(K)$ и проективное многообразие, их топология Зарисского, однородные полиномы, однородные множества. Биjectия проективных многообразий на однородные радикальные идеалы. Однородное координатное кольцо на V , его градуированность и конечное покрытие открытыми множествами, изоморфными аффинным многообразиям.

Произведение нетеровых топологических пространств и предмногообразий. Алгебраические многообразия, их морфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность аффинных и проективных многообразий, замкнутых, открытых и локально замкнутых подмножеств алгебраического многообразия X , размерность неприводимого алгебраического многообразия X .

Алгебраические группы, их гомоморфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность замкнутых подгрупп, прямых произведений и классических линейных групп над K . Замкнутые подгруппы в $GL_n(K)$, аффинные и линейные алгебраические группы. Связная компонента единицы линейной алгебраической группы G , ее замкнутость и нормальность, конечность индекса. Признак замкнутости произведения двух замкнутых подгрупп. Связность алгебраической группы, порожденной замкнутыми связными подгруппами. Гомоморфизмы в $GL_n(K)$ и рациональные представления алгебраической группы, совпадение ее размерности с суммой размерностей ядра и образа гомоморфизма.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

ПК-1:Способен применять в научно-исследовательской деятельности знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	
Уровень 1	Какие исследовательские вопросы стоят в рамках данной дисциплины знания
Уровень 1	Самостоятельно освоить темы дисциплины. углубляющие и детализирующие содержание лекционных и семинарских занятий
Уровень 1	Алгоритмическими методами решения задач и проблем. входящими в рамки данной дисциплины

1.4 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

При изучении дисциплины студентам достаточно владеть основными понятиями стандартных курсов:

- алгебра (используемые разделы: алгебраические системы, алгебра многочленов, многообразия, специальные классы отношений),
- аналитическая, аффинная и проективная геометрии,
- дискретная математика (используемые разделы: основы теории графов, элементы теории множеств),
- топология

Элементы общей алгебры и дискретной математики

Данная дисциплина может быть полезна при освоении курсов по информационной безопасности, использующих алгебраические кривые, и курсов по современным проблемам математики.

1.5 Особенности реализации дисциплины

Язык реализации дисциплины Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется без применения ЭО и ДОТ.

2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	Семестр
		1
Общая трудоемкость дисциплины	3 (108)	3 (108)
Контактная работа с преподавателем:	1,06 (38)	1,06 (38)
занятия лекционного типа	0,53 (19)	0,53 (19)
занятия семинарского типа		
в том числе: семинары		
практические занятия	0,53 (19)	0,53 (19)
практикумы		
лабораторные работы		
другие виды контактной работы		
в том числе: групповые консультации		
индивидуальные консультации		
иная внеаудиторная контактная работа:		
групповые занятия		
индивидуальные занятия		
Самостоятельная работа обучающихся:	0,94 (34)	0,94 (34)
изучение теоретического курса (ТО)		
расчетно-графические задания, задачи (РГЗ)		
реферат, эссе (Р)		
курсовое проектирование (КП)	Нет	Нет
курсовая работа (КР)	Нет	Нет
Промежуточная аттестация (Экзамен)	1 (36)	1 (36)

3 Содержание дисциплины (модуля)

3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

№ п/п	Модули, темы (разделы) дисциплины	Занятия лекционного типа (акад. час)	Занятия семинарского типа		Самостоятельная работа, (акад. час)	Формируемые компетенции
			Семинары и/или Практические занятия (акад. час)	Лабораторные работы и/или Практикумы (акад. час)		
1	2	3	4	5	6	7
1	Модуль I.	11	11	0	20	ПК-1
2	Модуль II.	8	8	0	6	ПК-1
3	Модуль III.	0	0	0	8	ПК-1
Всего		19	19	0	34	

3.2 Занятия лекционного типа

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование занятий	Объем в акад. часах		
			Всего	в том числе, в инновационной форме	в том числе, в электронной форме
1	1	Введение в алгебраическую геометрию по статье А.И.Мальцева «Группы и другие алгебраические системы, 1956 г».	1	0	0
2	1	Начальные определения теории колец: кольцо, идеал, порождающее множество идеала, кольцо главных идеалов, делители нуля. Лемма о высшем члене произведения двух полиномов в кольце полиномов n переменных и ее следствие.	2	0	0

3	1	Факториальные кольца. Примеры нефакториальных числовых колец с разложением на простые множители.	2	0	0
4	1	Простые и максимальные идеалы. Лемма о двух эквивалентных условиях простоты идеала. Теорема о фактор-кольце по максимальному идеалу. Теорема о включении любого идеала в максимальный идеал в коммутативном кольце с единицей.	2	0	0
5	1	Нетеровы кольца. Теорема об эквивалентных условиях нетеровости. Теорема Гильберта о базисе и ее следствия.	2	0	0
6	1	Аффинные многообразия, радикальные кольца. Теорема о непустоте множества нулей любого собственного идеала кольца $K[x_1, \dots, x_n]$.	2	0	0
7	2	Теорема Гильберта о нулях. Теорема о взаимно однозначном соответствии точек аффинного пространства и максимальных идеалов кольца $K[x_1, \dots, x_n]$.	2	0	0
8	2	Топологические пространства. Примеры. Топология Зарисского.	2	0	0
9	2	Аффинные алгебраические группы. Примеры.	2	0	0

10	2	Связная компонента единицы линейной алгебраической группы G , ее замкнутость и нормальность, конечность ее индекса.	2	0	0
Всего			10	0	0

3.3 Занятия семинарского типа

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование занятий	Объем в acad. часах		
			Всего	в том числе, в инновационной форме	в том числе, в электронной форме
1	1	Введение в алгебраическую геометрию по статье А.И.Мальцева «Группы и другие алгебраические системы, 1956 г».	1	0	0
2	1	Начальные определения теории колец: кольцо, идеал, порождающее множество идеала, кольцо главных идеалов, делители нуля. Лемма о высшем члене произведения двух полиномов в кольце полиномов n переменных и ее следствие.	2	0	0
3	1	Факториальные кольца. Примеры нефакториальных числовых колец с разложением на простые множители.	2	0	0
4	1	Простые и максимальные идеалы. Лемма о двух эквивалентных условиях простоты идеала. Теорема о фактор-кольце по максимальному идеалу. Теорема о включении любого идеала в максимальный идеал в коммутативном кольце с единицей.	2	0	0

5	1	Нетеровы кольца. Теорема об эквивалентных условиях нетеровости. Теорема Гильберта о базисе и ее следствия.	2	0	0
6	1	Аффинные многообразия, радикальные кольца. Теорема о непустоте множества нулей любого собственного идеала кольца $K[x_1, \dots, x_n]$.	2	0	0
7	2	Теорема Гильберта о нулях. Теорема о взаимно однозначном соответствии точек аффинного пространства и максимальных идеалов кольца $K[x_1, \dots, x_n]$.	2	0	0
8	2	Топологические пространства. Примеры. Топология Зарисского.	2	0	0
9	2	Аффинные алгебраические группы. Примеры.	2	0	0
10	2	Связная компонента единицы линейной алгебраической группы G , ее замкнутость и нормальность, конечность ее индекса.	2	0	0
Всего			10	0	0

3.4 Лабораторные занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование занятий	Объем в акад. часах		
			Всего	в том числе, в инновационной форме	в том числе, в электронной форме
Всего					

4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
---------------------	----------	-------------------

Л1.1	Стейнберг Р., Кириллов А. А.	Лекции о группах Шевалле: перевод с английского	Москва: Мир, 1975
Л1.2	Горенштейн Д.	Конечные простые группы: введение в их классификацию: перевод с английского	Москва: Мир, 1985

5 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

6 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

6.1. Основная литература			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Шафаревич И. Р.	Основы алгебраической геометрии: монография	Москва: МЦНМО, 2007
6.2. Дополнительная литература			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Хамфри Д. Е., Платонов В. П.	Линейные алгебраические группы: пер. с англ.	Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980
6.3. Методические разработки			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Стейнберг Р., Кириллов А. А.	Лекции о группах Шевалле: перевод с английского	Москва: Мир, 1975
Л3.2	Горенштейн Д.	Конечные простые группы: введение в их классификацию: перевод с английского	Москва: Мир, 1985

7 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Э1	Алгебраическая геометрия	https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F
----	--------------------------	---

8 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Самостоятельная работа состоит в изучении теоретического материала и решении комплектов задач .

Основные разделы: Аффинная и проективная геометрии. Свободные K -модули. Схемы квадратичных форм и квадрики Теоремы Гильберта о базисе и о корнях (нулях). Алгебраические многообразия, их морфизмы и изоморфизмы. Аффинные и линейные алгебраические группы. Замкнутость и нормальность, конечность индекса связной компоненты.

Темы для самостоятельного изучения.

1. Группы преобразований линейного пространства, индуцирующие коллинеации проективной геометрии. Классические группы. Теорема о полулинейном преобразовании, индуцирующем изоморфизм проективных геометрий.

2. Основная теорема проективной геометрии. Свободный K -модуль, унимодулярный вектор, проективность. Обобщенная основная теорема. Группы $PGL(V)$, $PGL(V)$, $PSL(V)$.

3. Квадратичные формы и квадрики проективных пространств. Схемы квадратичных форм поля и кольца. Гипотезы об элементарных типа QF - схем.

4. Принцип дуальности. Теорема о порядке проективной плоскости.

5. Теорема Брука-Райзера. Теорема о связи аффинной и проективной плоскости.

6. Координатное кольцо $K[V]$ и его характеристика, неприводимые многообразия и неприводимые компоненты, связь неприводимости V и простоты идеала $J(V)$, пучок K -значных функций на V .

7. Произведение нетеровых топологических пространств и предмногообразий. Алгебраические многообразия, их морфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность аффинных и проективных многообразий, замкнутых, открытых и локально замкнутых подмножеств алгебраического многообразия X , размерность неприводимого алгебраического многообразия X .

8. Алгебраическое многообразие размерности 1. Плоские аффинные алгебраические кривые. Необходимость учёта бесконечно удалённых точек. Особенности алгебраических кривых. Примеры.

9. Алгебраические группы, их гомоморфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность замкнутых подгрупп, прямых произведений и классических линейных групп над K .

10. Признак замкнутости произведения двух замкнутых подгрупп. Связность алгебраической группы, порожденной замкнутыми

связными подгруппами.

11. Теорема Шевалле о классификации простых алгебраических групп.

12. Гомоморфизмы в $GL_n(K)$ и рациональные представления алгебраической группы, совпадение ее размерности с суммой размерностей ядра и образа гомоморфизма.

Темы для самостоятельного изучения и комплекты задач выдаются лектором из учебников:

1. Р. Стейнберг, Лекции о группах Шевалле, М.: Мир, 1972.

2. Д. Горенштейн, Введение в классификацию конечных простых групп, М.: Мир, 1984.

Усвоение данных тем проверяется на экзамене.

Задачи проверяются во время последующих практических занятий в рамках контроля самостоятельных работ.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации в зависимости от нозологии:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

9 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости)

9.1 Перечень необходимого программного обеспечения

9.1.1	Не предусмотрено.
-------	-------------------

9.2 Перечень необходимых информационных справочных систем

9.2.1	Не предусмотрено.
-------	-------------------

10 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Для проведения занятий требуется оборудованная доской аудитория.